En une page... l'analyse dimensionnelle

Résumé. L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité des formules trouvées lors de la résolution d'un problème physique. On retiendra qu'un résultat inhomogène est nécessairement faux, qu'un résultat homogène n'est pas obligatoirement juste.

La dimension des termes d'une formule dépend de leur signification physique. Les dimensions sont définies à partir du sens physique des sept unités de base du Système international d'unités, dites unités SI, regroupées dans le tableau 1.

Unité SI (symbole)	Grandeur (dimension)
mètre (m)	Longueur (L)
seconde (s)	Durée (T)
kilogramme (kg)	Masse (M)
kelvin (K)	Température (Θ)
ampère (A)	Intensité électrique (I)
mole (mol)	Quantité de matière (N)
candela (cd)	Intensité lumineuse (J)

Tableau 1 – Unités de base du Système international

Le Système international a été construit de manière à pouvoir exprimer toute unité à partir d'une combinaison d'unités de base. Il est donc possible d'exprimer la dimension de toute grandeur physique avec les sept dimensions irréductibles. Ainsi et par définition, les angles ont une unité mais pas de dimension.

L'analyse dimensionnelle consiste en la recherche de l'équation aux dimensions d'une grandeur physique. Dans cette équation sont prises en compte uniquement les grandeurs physiques et sont laissés de côté les constantes sans dimension, les facteurs de conversion et les nombres. Elle permet donc de trouver la dimension d'un résultat exprimée en fonction des dimensions irréductibles et de la comparer à d'autres résultats. La forme générale d'une équation aux dimensions est

$$[X] = \dim X = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\epsilon N^\zeta J^\eta \ , \tag{1}$$

avec $[X]$ et $\dim X$ la dimension de la grandeur X. Les coefficients dimensionnels α, β, γ, δ, ϵ, ζ et η sont des entiers relatifs. Un nombre sans dimension a une dimension égale à 1, les coefficients sont tous nuls.

Intuitivement, il est possible de se rendre compte que la comparaison d'une température et d'une durée n'a pas de sens. Ainsi, seules des grandeurs ayant la même dimension pourront être comparées, sommées et soustraites. Une équation inhomogène sera donc nécessairement fausse. En revanche, il est possible de multiplier ou diviser des grandeurs de dimensions différentes entre elles, ainsi qu'avec des grandeurs sans dimension. Cependant, une fonction mathématique comme exponentielle ou cosinus ne peut être appliquée qu'à des nombres sans dimension.

Supposons que l'énergie cinétique E_c d'un oscillateur harmonique s'exprime comme

$$E_c = m\left(v_0 \cos(\omega_0 t)\right)^2/2 \ . \tag{2}$$

avec m la masse de l'objet, v_0 sa vitesse initiale, ω_0 la pulsation propre du phénomène et t une durée prise par rapport à une référence. On recherche alors l'équation aux dimensions de l'énergie cinétique. Le nombre dans la fonction cosinus doit être sans dimension. En effet,

$$[\omega_0 t] = T^{-1} \cdot T = 1 \ . \tag{3}$$

Ceci étant vérifié, la dimension de l'énergie s'écrit

$$[E_c] = \left[m\left(v_0 \cos(\omega_0 t)\right)^2/2\right] \tag{4}$$

$$= M \cdot (L \cdot T^{-1})^2 \cdot 1^{-1} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \ . \tag{5}$$

La dimension d'un nombre est effectivement 1, et ici, le quotient et le résultat de la fonction cosinus sont des nombres. Ils n'interviennent donc pas dans le résultat. Par ailleurs, il est possible de dire que l'unité joule s'exprime comme la multiplication d'une masse avec une longueur au carré sur un temps au carré. Il est possible de vérifier que cette équation est homogène, en comparant le résultat précédent avec celui donné par la formule donnant l'énergie potentielle de pesanteur, avec g l'intensité du champ de pesanteur et z l'altitude,

$$E_p = mgz + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R} \ , \tag{6}$$

$$[E_p] = [C] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \ . \tag{7}$$

Les résultats des équations (5) et (7) sont bien identiques, les équations (2) et (6) sont bien homogènes. Dans l'équation (6), la constante C a la dimension d'une énergie.

L'analyse dimensionnelle permet aussi de déterminer des relations entre des grandeurs, voire de calculer des valeurs numériques sans résoudre les équations liées aux phénomènes physiques. Si on prend l'exemple d'un pendule pesant de masse m, de longueur de tige l et plongé dans un champ de pesanteur g, il est possible de construire une durée Δt à partir des grandeurs pertinentes du problème comme

$$\Delta t = k\sqrt{l/g} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \ . \tag{8}$$

En effet, en vérifiant sa dimension, on obtient

$$[\Delta t] = \left[k\sqrt{l/g}\right] = 1 \cdot \left(L \cdot (L \cdot T^{-2})^{-1}\right)^{1/2} = T \ . \tag{9}$$

La grandeur Δt est un temps caractéristique du phénomène. La résolution analytique d'un tel problème fera apparaitre cette durée, et indiquera que c'est la période propre du phénomène d'oscillation, avec $k = 2\pi$.

L'analyse dimensionnelle est une méthode puissante : elle a permis au physicien Geoffrey Taylor d'estimer, en 1941, la puissance dégagée par la première explosion nucléaire à la seule aide des photographies de celle-ci, alors que cette valeur était gardée secrète.