Exercices d'application pour les fiches « En une page... »

Un exercice d'application est proposé pour certaines fiches, avec une première question ayant une correction rédigée, et quelques questions additionnelles à titre d'entraînement.

Table des matières

Date de dernière édition : 11 décembre 2020

1 Équation différentielle d'ordre 1, avec second membre constant

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + 5\theta = 10 \text{ avec } \theta(t=0) = 0 \ .$$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

2.a. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1}{10}z = 0$ avec $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 3$. **2.b.** $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - q = 7$ avec $q(t=1) = 3$.

Correction

1. On a l'équation différentielle qui lie $\theta(t)$ à sa dérivée première. Cette équation différentielle possède un second membre, sa solution sera alors composée de la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière :

$$\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t) \ .$$

La solution homogène se trouve en posant la solution homogène comme étant la solution de l'équation différentielle sans second membre. Alors,

$$\theta_h(t) = A\exp(-5t) \ , \ A \in \mathbb{R},$$

est la solution de l'équation homogène

$$\frac{\mathrm{d}\theta_h}{\mathrm{d}t} + 5\theta_h = 0 \ .$$

Avant de chercher à déterminer la constante réelle A, il faut rechercher la solution particulière. Le second membre constant, alors la fonction $\theta_p(t)$ est une fonction constante. Ici, on a, lorsque la variable t tend vers l'infini :

$$5\theta_p(t) = 10 \ , \ \theta_p(t) = 2 \ .$$

Ainsi, la solution obtenue est :

$$\begin{cases} \theta(t) = A\exp(-5t) + 2 \\ \theta(t=0) = 0 \end{cases}$$

On détermine la constante, et on obtient la solution de l'équation différentielle avec sa condition initiale :

$$\theta(t) = 2(1 - \exp(-5t)) \ .$$

2. On a les solutions suivantes :

2.a. $z(x) = -30\exp\left(-\dfrac{x}{10}\right)$. **2.b.** $q(t) = \dfrac{10}{e}\exp(t) - 7$.

2 Équation différentielle d'ordre 2, avec second membre constant

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$9\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4y=8 \text{ avec } \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=5, y(t=0)=9 \ .$$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

2.a. $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1$ avec $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=3, z(x=0)=1.$

2.b. $\dfrac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+q=0$ avec $\left.\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=1, q(t=0)=0.$

Correction

1. L'équation différentielle lie la fonction $y(t)$ à sa dérivée seconde, c'est une équation différentielle d'ordre 2 avec un second membre. La solution sera donc composée d'une solution homogène $y_h(t)$ et d'une solution particulière $y_p(t)$. Pour déterminer la solution homogène, on considère l'équation différentielle sans second membre

$$9\frac{\mathrm{d}^2y_h}{\mathrm{d}t^2}+4y_h=0 \ ,$$

et on en déduit le polynôme caractéristique, avec r les racines de l'équation différentielle

$$9r^2+4=0$$

Il est alors possible de déterminer le discriminant

$$\Delta=-4\times 9\times 4=-144<0 \ .$$

Les racines sont donc

$$r_1=j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\times 9}=j\frac{2}{3} \ , r_2=-j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\times 9}=-j\frac{2}{3} \ ,$$

et la solution homogène aura donc la forme

$$y_h(t)=A\cos\left(\frac{2t}{3}\right)+B\sin\left(\frac{2t}{3}\right) \text{ avec } (A,B)\in\mathbb{R}^2 \ .$$

Il est alors possible de déterminer la solution particulière qui est constante, car le second membre est constant. Lorsqu'on fait tendre la variable temps t vers l'infini :

$$4y_p(t)=8 \text{ soit } y_p(t)=2 \ .$$

Ensuite, il est possible d'utiliser les conditions initiales pour déterminer les constantes A et B :

$$y(t=0) = 9 = A\cos\left(\frac{2\times 0}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2\times 0}{3}\right) + 2 = A + 2 \ , \ A = 7 \ ,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 5 = -\frac{2A}{3}\sin\left(\frac{2\times 0}{3}\right) + \frac{2B}{3}\cos\left(\frac{2\times 0}{3}\right) = \frac{2B}{3} \ , \ B = \frac{15}{2} \ .$$

On obtient alors le résultat

$$y(t) = 7\cos\left(\frac{2t}{3}\right) + \frac{15}{2}\sin\left(\frac{2t}{3}\right) + 2 \ .$$

2. On a les solutions suivantes :

2.a. $z(x) = -2\exp(-x) + x + 3$.

2.b. $q(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\exp\left(\dfrac{t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.