En une page... les coniques

Résumé. Les coniques sont des courbes intervenant dans les tracés de trajectoires, en particuliers celles de corps dans un champ de forces conservatives.

Une conique est une courbe résultant de l'intersection d'un cône avec un plan. Elle possède quelques caractéristiques :

— le foyer F ;
— une directrice Δ ;
— une excentricité e ;
— le paramètre p.

L'excentricité est une constante, donnée par

$$\frac{\text{distance } MF}{\text{distance } (M,\Delta)} = e \ . \tag{1}$$

On distingue quatre coniques différentes visibles sur la figure 1 : le cercle ($e = 0$), l'ellipse ($e < 1$), la parabole ($e = 1$) et l'hyperbole ($e > 1$). Le paramètre p de la conique est donné par la distance FI, distance entre F et I, avec F le projeté orthogonal de I sur l'axe (Ox), l'axe de symétrie de la courbe. On a alors

$$\frac{IF}{IJ} = \frac{p}{FH} = e \text{ et } FH = \frac{p}{e} \ , \tag{2}$$

d'après les constructions visibles sur la figure 2. Le point F est appelé foyer de la conique.

Pour une ellipse, on a l'équation paramétrique et l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = a\cos\omega t \\ y(t) = b\sin\omega t \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \ , \tag{3}$$

avec a et b les demi-grand et demi-petit axes de l'ellipse. On définit également la constante $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, la distance entre le centre de l'ellipse Ω et l'un de ses foyers, F par exemple. On pourra également retrouver les relations suivantes, avec $\mathcal{A}$ l'aire de la figure :

$$e = \frac{c}{a} < 1,\ p = \frac{b^2}{a} \text{ et } \mathcal{A} = \pi ab \ . \tag{4}$$

On remarque que pour le cercle, l'excentricité e est nulle, on a égalité entre les paramètres a et b. Ces paramètres sont alors le rayon R du cercle, et l'équation (3) devient dans ce cas

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = R\cos\omega t \\ y(t) = R\sin\omega t \end{array} \right. \quad \text{et } x^2 + y^2 = R^2 \ . \tag{5}$$

En coordonnées polaires, on définit, pour l'ellipse

$$r = FM \text{ et } \theta = (Fx, FM) \ . \tag{6}$$

L'expression donnant la courbe en coordonnées polaires est alors

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \ . \tag{7}$$

Dans le cas $e = 1$, on a une parabole, son équation est donnée par l'équation (7).

Pour une excentricité $e > 1$ et un paramètre p donné, l'hyperbole possède deux branches définies par les relations

$$r_1 = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \text{ et } r_2 = \frac{p}{e\cos\theta - 1} \ . \tag{8}$$

Ainsi, pour la figure 2 sur laquelle est représentée une conique, le choix a été fait de ne représenter qu'une des deux branches de l'hyperbole. La seconde branche est le symétrique de la première branche par l'axe (Δ). Dans le cas d'un problème physique, une seule des deux branches correspond à la trajectoire réelle du corps étudié.

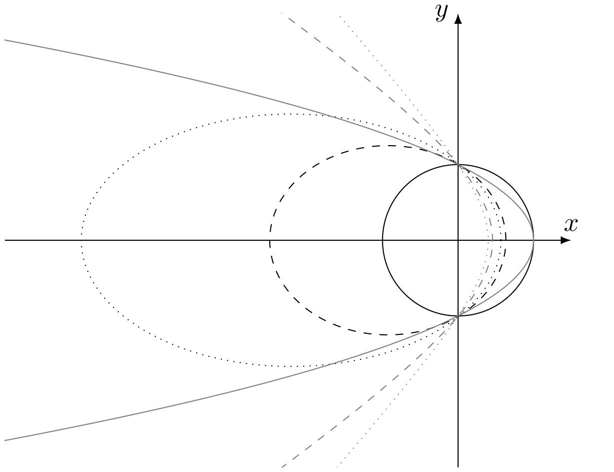

FIGURE 1 – Coniques ($p = 1$) : cercle (noir, trait continu), ellipses (noires, pointillés), parabole (grise, trait continu) et hyperboles (grises, pointillés)

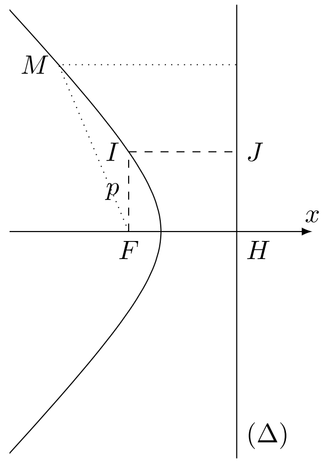

FIGURE 2 – Conique avec $e = 1,4$ et $p = 1,1$