En une page... les développements limités

Résumé. Le développement limité est un outil important pour le physicien. Il permet de déterminer un polynôme approchant une fonction quelconque, au voisinage d'une certaine valeur. Ce polynôme permet, sous condition, de linéariser une fonction et donc de simplifier grandement le problème étudié.

Les développements limités sont basés sur le théorème de Taylor. Rappelons la formule de Taylor-Young :

Soit I un intervalle non trivial [1] de $\mathbb{R}$, a un élément de I, n un entier et $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable n fois sur l'intervalle I. Alors, pour tout réel x dans l'intervalle I, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathcal{R}_n(x) \ , \qquad (1)$$

avec $\mathcal{R}_n(x) = o\left((x-a)^k\right)$ un nombre négligeable devant $(x-a)^n$ au voisinage du point a.

Un développement limité est l'approximation polynomiale de la fonction f obtenue avec un reste $\mathcal{R}_n(x)$ qui peut être négligé. De ces définitions, il est possible de tirer quelques conclusions importantes pour l'exercice de la physique :

— il est possible de choisir l'ordre n auquel le développement limité est effectué ;

— la fonction f peut être linéarisée avec un développement limité à l'ordre $n = 1$, ce qui permet de revenir à une équation linéaire, plus simple à étudier que l'équation originale ;

— la fonction $\mathcal{R}$ traduit l'erreur commise en faisant le développement limité à l'ordre n.

En physique, l'écriture de la fonction $\mathcal{R}_n$ sera omise, et on considérera que l'erreur faite par le développement limité est le plus souvent négligeable. Parfois, ce dernier point ne sera pas vérifié, ce qui obligera à prendre en compte le terme non nul suivant dans la somme de l'équation (1).

Quelques développements limités interviennent fréquemment en physique, ils sont regroupés dans le tableau 1. On remarquera que :

— le développement limité de $\tan x$ peut être calculé de manière exacte, mais il fait intervenir des nombres qu'il faudrait préalablement définir ;

— on suppose que α est un réel non nul.

Fonction	Développement limité
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$-x - \dfrac{x^2}{2} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\exp x$	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\cos x$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$
$\sin x$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\tan x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + o(x^8)$
$\arctan x$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

TABLEAU 1 – Développements limités de fonctions usuelles au voisinage de $x = 0$

1. Pour parler de dérivabilité, l'intervalle I doit être non vide et non réduit à un point.