En une page... les équations différentielles d'ordre 1

Résumé. Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 apparaissent souvent dans les problèmes de physique, comme des intermédiaires de calcul, pour déterminer les fonctions solutions du problème considéré.

Prenons un exemple d'équation différentielle linéaire, à coefficients constants et d'ordre 1 en électrocinétique : la charge d'un condensateur d'un circuit RC par un générateur délivrant une force électromotrice constante E. Il est possible de montrer que la forme de l'équation différentielle obtenue pour la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur est, pour t positif :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC} \ . \tag{1}$$

Par analyse dimensionnelle, on trouve que le produit RC a la dimension d'un temps, on pourra donc poser

$$\tau = RC \tag{2}$$

avec τ la constante de temps liée au phénomène physique. Si la dérivée première se fait par rapport à l'espace, on notera cette constante δ, la longueur caractéristique du phénomène. C'est une bonne pratique pour se ramener à des formes ayant une écriture qui permet un contrôle rapide de l'homogénéité du résultat.

On a donc la forme générale de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau} \ . \tag{3}$$

Le terme de gauche est appelé équation homogène, et le terme de droite, second membre de l'équation. La solution sera la somme $u_h(t) + u_p(t)$ avec :

— la solution homogène notée $u_h(t)$, solution de l'équation sans second membre qui considère que le second membre est nul ;
— la solution particulière notée $u_p(t)$ qui tient compte du second membre.

L'équation sans second membre admet donc une solution où la fonction solution et sa dérivée ont la même forme. L'unique fonction ayant cette propriété est la fonction exponentielle. On recherche donc une solution homogène ayant la forme

$$u_h(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \ \text{avec } A \in \mathbb{R} \ . \tag{4}$$

On laissera le soin au lecteur de vérifier la dimension de la constante d'intégration A et que l'équation (4) est bien solution de l'équation différentielle sans second membre.

La solution particulière $u_p(t)$ s'obtient en remplaçant la fonction $u(t)$ par la somme $u_h(t) + u_p(t)$ dans l'équation différentielle. Pour cela, il faut ensuite annuler la solution homogène : il s'agit donc de faire tendre la variable de la fonction vers l'infini. Ainsi, si le second terme est constant, alors la solution particulière aura la même forme, une constante. Au bilan, l'équation se réécrit comme

$$\frac{u_p}{\tau} = \frac{E}{\tau} \ , \tag{5}$$

et on obtient la solution $u_p(t) = E$.

Il est à noter que le second membre peut être nul, auquel cas la solution $u_p(t)$ est la fonction nulle. Aussi, si le second membre varie, la solution particulière aura une forme variable.

La fonction obtenue correspond à une infinité de solutions :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E \ . \tag{6}$$

Pour trouver l'unique solution au problème physique considéré, il faudra déterminer une condition initiale ou une condition aux limites. Ici, nous prendrons

$$u(t = 0^-) = u(t = 0^+) = 0 \ . \tag{7}$$

À $t = 0$, on remplace $u(t)$ par sa valeur dans l'équation (6) et on obtient $A = -E$. Ainsi, l'unique solution pour les temps positifs est la fonction

$$u(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \ . \tag{8}$$

À cette étape, il est recommandé de vérifier l'homogénéité et l'allure de la solution obtenue. Il est aussi possible de tracer la solution en fonction de sa variable.

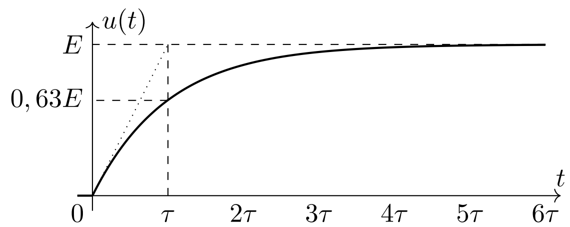

FIGURE 1 – Solution $u(t)$ de l'équation (1) avec la condition initiale $u(t = 0) = 0$

On notera sur la figure les points en rapport avec la constante caractéristique du phénomène τ. On remarque que la droite tangente à la fonction $u(t)$ à l'instant initial coupe l'asymptote horizontale à la date τ. Quelques τ après la perturbation initiale, on considère que la solution homogène est négligeable par rapport à la solution particulière. En effet, on a :

$$u(4,6\tau) = 0,99 \cdot u(t \to \infty) \simeq u_p(t) \ . \tag{9}$$

On a alors d'établissement d'un régime permanent après un régime transitoire au cours duquel le système s'est adapté à la perturbation initiale. On considère que cette adaptation prend un temps égal à quelques fois τ, le temps caractéristique du système.

