En une page... les équations différentielles d'ordre 2

Résumé. Un grand nombre de problèmes physiques ont pour solution des fonctions solutions d'équations différentielles d'ordre 2, linéaires et à coefficients constants, principalement pour des systèmes résonants amortis ou non.

Les équations différentielles d'ordre 2 peuvent toutes être mises sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=\omega_0^2E\ . \tag{1}$$

Prenons un exemple en électrocinétique avec, par exemple, un circuit du deuxième ordre soumis à un échelon de tension dont la réponse est $u(t)$, une fonction réelle, pour t positif. On appellera ω_0 la pulsation propre du système et Q son facteur de qualité.

Le terme de gauche est appelé équation homogène, et le terme de droite, second membre de l'équation différentielle. Comme pour les équations différentielles d'ordre 1, la solution $u(t)$ de cette équation différentielle est la somme $u_h(t)+u_p(t)$ avec :

- la solution homogène notée $u_h(t)$, solution de l'équation sans second membre qui considère que le second membre est nul ;
- la solution particulière notée $u_p(t)$ qui tient compte du second membre.

Trouver la solution homogène suppose prendre le second membre nul. On a alors l'équation homogène qui impose une fonction $u_h(t)$ de la même forme que ses dérivées première et seconde : elle sera donc une combinaison linéaire de fonctions exponentielles. On pose alors $u_h(t)\propto\exp(rt)$, et en injectant cette solution dans l'équation (1), on obtient le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0\ . \tag{2}$$

Trois cas se distinguent en fonction de la valeur du discriminant Δ de cette équation. Le premier d'entre eux est $\Delta<0$, soit $Q>1/2$. Ainsi, l'équation caractéristique (2) admet deux racines complexes :

$$r_\pm=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\ . \tag{3}$$

Ainsi, la forme complexe de la solution homogène est

$$\underline{u}_h(t)=A\exp(r_+t)+B\exp(r_-t)\text{ avec }(A,B)\in\mathbb{C}^2\ . \tag{4}$$

En posant C et D deux nouvelles constantes réelles, il est possible de réécrire cette solution dans l'espace des réels avec des fonctions trigonométriques comme

$$u_h(t)=\left(C\cos\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t+D\sin\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right). \tag{5}$$

On identifie ce régime à un régime pseudo-périodique en raison des oscillations de sa solution.

Ensuite, on étudie le cas où $\Delta>0$ et $Q<1/2$. On obtient alors deux racines réelles

$$r_\pm=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\ . \tag{6}$$

Ainsi, la forme de la solution homogène est donc identique à l'équation (4). Ce régime est appelé régime apériodique, par opposition au régime précédent.

Enfin, le dernier cas est appelé régime critique avec $\Delta=0$ et $Q=1/2$. Ici, une unique racine est obtenue, et la solution est

$$u_h(t)=(A+Bt)\exp(-\omega_0t)\text{ avec }(A,B)\in\mathbb{R}\ . \tag{7}$$

Ce régime est celui qui annule $u_h(t)$ le plus rapidement.

Une fois la solution homogène obtenue, il s'agit de trouver la solution particulière $u_p(t)$. Pour cela, il est possible de faire tendre la variable vers l'infini, et la solution homogène s'annulera. Il faut analyser la forme du second membre, car la solution $u_p(t)$ aura la même forme que celui-ci. Nous supposerons ici que c'est une constante, mais il est à noter qu'il peut être variable. Pour une solution particulière constante, il reste

$$u_p(t)=E\ . \tag{8}$$

Notons que si le second membre est nul, alors la solution particulière $u_p(t)$ est la fonction nulle. Remarquons aussi que si le facteur de qualité tend vers l'infini, l'équation illustre un oscillateur harmonique. Ceci n'empêche pas d'obtenir l'équation particulière de manière analogue à celle présentée ici.

À cette étape, la solution est une famille de fonctions solutions du problème physique considéré. Pour déterminer l'unique solution, il faut déduire des conditions initiales ou aux limites les constantes de la solution homogène. Les conditions à rechercher sont des valeurs de la fonction $u(t)$ ou de sa dérivée première en des points précis.

Le tracé des trois types de solution sur la figure 1 permet de remarquer que la fonction oscillante correspond au régime pseudo-périodique, la solution en pointillé le régime apériodique, et la solution en trait plein, le régime critique. On remarque que toutes les solutions tendent vers la solution particulière E.

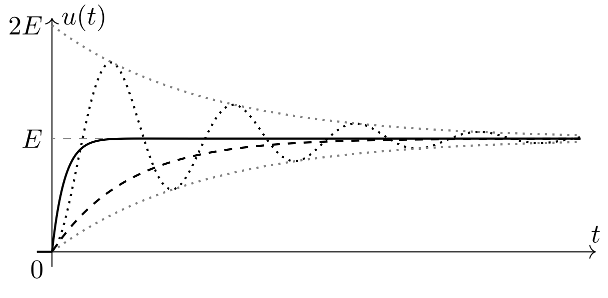

FIGURE 1 – Solutions $u(t)$ de l'équation (1) avec les conditions initiales $u(t=0)=0$ et $\dot{u}(t=0)=0$