En une page... les systèmes de coordonnées

Résumé. Les systèmes de coordonnées, aussi appelés repères, permettent repérer la position d'objets ou de points dans l'espace.

Le choix du système de coordonnées est un moment important dans la résolution d'un problème physique. En effet, nombreux sont les problèmes où il est utile de repérer la position de points ou d'objets dans l'espace, de calculer des volumes ou des surfaces, ou d'étudier des mouvements au cours du temps. Le choix d'un système de coordonnées approprié permet souvent de simplifier les calculs, alors qu'un choix malencontreux d'un système complexifie très rapidement les équations.

Les trois systèmes de coordonnées usuels sont les systèmes cartésien, cylindrique et sphérique. Ils permettent d'étudier simplement des problèmes ayant des symétries différentes. L'étude du champ gravitationnel créé par la Terre peut être bien entendu étudié avec un système de coordonnées cartésien ou cylindrique, à grand renfort de fonctions trigonométriques, mais le choix naturel sera un système de coordonnées sphérique, avec pour centre de ce système le centre de l'objet sphérique, ici la Terre.

On rappelle que les vecteurs notés $\vec{u}_i$ sont les vecteurs unitaires de norme 1. Ainsi, ils ne portent qu'une direction et un sens.

Le système de coordonnées cartésien (figure 1) est le plus naturel de tous, il peut être utilisé dans quasiment toutes les situations. Pour repérer un point M $(x,\, y,\, z)$, on utilise les vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$, qui forment ainsi une base orthonormée directe. C'est une base globale, les trois vecteurs unitaires pointant toujours dans les mêmes directions quelle que soit la position du point M. On a ainsi

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \ . \tag{1}$$

Ensuite, considérons le système de coordonnées polaires, adapté aux mouvements plans de rotation autour d'un point fixe, noté O. Cela correspond au cas décrit sur la figure 2 dans le plan (Oxy). Le point $N(r,\theta)$ est repéré à l'aide d'une base locale définie par les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ tels que

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{ON}}{\|\overrightarrow{ON}\|} \ , \ (\vec{u}_r;\vec{u}_\theta) = +\frac{\pi}{2} \ . \tag{2}$$

Le vecteur position est donc

$$\overrightarrow{ON} = r\vec{u}_r = r\cos\theta\,\vec{u}_x + r\sin\theta\,\vec{u}_y \ . \tag{3}$$

Le système de coordonnées cylindrique (figure 2) est construit par ajout d'un troisième axe au repère polaire, l'axe (Oz). Il est en particulier adapté à la description de mouvements s'inscrivant sur la surface d'un cylindre. On repère ainsi la position du point M $(r,\, \theta,\, z)$ en utilisant les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z = r\cos\theta\,\vec{u}_x + r\sin\theta\,\vec{u}_y + z\vec{u}_z \ . \tag{4}$$

Les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ forment une base locale, leur direction dépendant de la position du point M.

Le dernier système de coordonnées habituellement utilisé est le système sphérique (figure 3). Celui-ci est adapté au repérage de points sur une sphère. On repère la position du point M par ses coordonnées $(r,\, \theta,\, \varphi)$. On construira au point M une base locale de vecteurs $(\vec{u}_r,\, \vec{u}_\theta,\, \vec{u}_\varphi)$. On a donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{u}_r \\ &= r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{u}_x + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{u}_y + r\cos\theta\,\vec{u}_z \ ,\end{aligned} \tag{5}$$

avec

$$\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} \ , \tag{6}$$

$\vec{u}_\theta$ s'inscrivant dans le plan contenant l'axe (Oz) et le vecteur $\vec{u}_r$, et $\vec{u}_\varphi$ étant le troisième vecteur permettant de créer une base orthonormée directe.

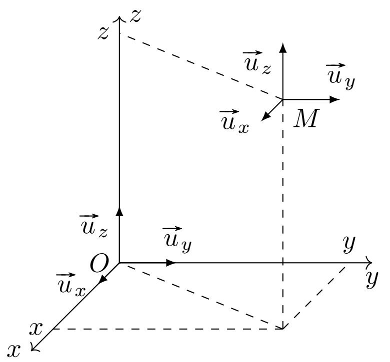

Figure 1 – Point M $(x,\, y,\, z)$ dans un repère cartésien

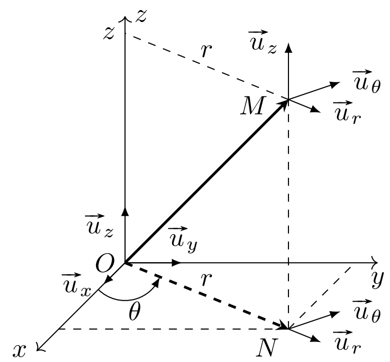

Figure 2 – Point M $(r,\, \theta,\, z)$ dans un repère cylindrique

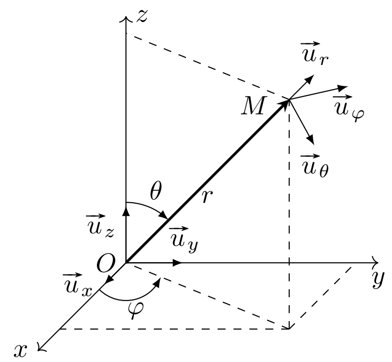

Figure 3 – Point M $(r,\, \theta,\, \varphi)$ dans un repère sphérique