En une page... la trigonométrie

Résumé. La trigonométrie, sous-partie des mathématiques, vise à obtenir des relations entre des angles et des distances. En physique, ces relations apparaissent très régulièrement comme en mécanique et en optique.

La relation mère de ce domaine est le théorème de Pythagore, donné par

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ ou } BC^2 + CA^2 = AB^2 \ , \tag{1}$$

relation vraie dans le triangle rectangle ABC rectangle en C de la figure 1. Rappelons que dans un triangle, la somme des trois angles supplémentaires donne π.

On définit ensuite les fonctions trigonométriques usuelles cosinus, sinus et tangente telles que, relativement à l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$, on a

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \ , \ \sin(\alpha) = \frac{a}{c} \ , \ \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \ .$$

On retiendra les moyens mnémotechniques « casse-toi » ou SOHCAHTOA, traduisant que le sinus correspond au rapport des longueurs du côté opposé à l'angle et de l'hypoténuse ; le cosinus, celles du côté adjacent et de l'hypoténuse ; la tangente, celles du côté opposé et du côté adjacent. Remarquons que ces fonctions donnent un résultat sans dimension, notons à l'aide de la figure 2 que les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur $[-1;1]$, et que l'ensemble de départ de la fonction tangente est $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

En divisant (1) par c^2, on obtient une première identité trigonométrique

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \ .$$

On retiendra également les relations de duplication

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \ ,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \ .$$

Remarquons que les fonctions tangente et sinus sont impaires, la fonction cosinus est paire, il est donc possible d'obtenir les développements de $\cos(\alpha-\beta)$ et de $\sin(\alpha-\beta)$ en remplaçant β par $-\beta$.

On en déduit aussi les formules dites de l'angle double, en posant $\beta = \alpha$:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \ ,$$
$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha) \ ,$$

puis les formules de linéarisation :

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \ , \ \sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \ .$$

Les relations de factorisation sont également utiles :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \ ,$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \ ,$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \ .$$

Dans un triangle quelconque, la loi des cosinus, dit théorème d'Al-Kashi, indique que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ .$$

La loi des sinus existe également. Bien que plus rarement utilisée, elle fait apparaitre la proportionnalité existant entre le sinus d'un angle et la longueur du côté opposé à cet angle dans tout triangle.

En traçant la fonction $\mathrm{e}^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$ dans le plan complexe (avec $j^2 = -1$) à l'image de la figure 3, on retrouve les formules d'Euler du sinus et du cosinus ainsi que la formule de Moivre :

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{j\alpha} + \mathrm{e}^{-j\alpha}}{2} \ , \ \sin(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{j\alpha} - \mathrm{e}^{-j\alpha}}{2j} \ ,$$

$$(\cos(\alpha) + j\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + j\sin(n\alpha) \ .$$

Sur la figure 3, on repère également la valeur de $\tan(\alpha)$, la pente de la droite (OM) si α appartient au domaine de définition de la fonction tangente :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \ .$$

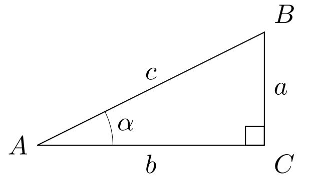

Figure 1 – Triangle ABC rectangle en C

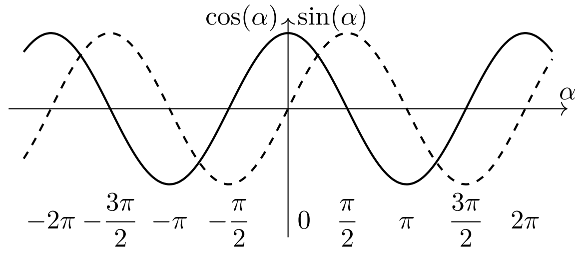

Figure 2 – Allure des fonctions sinus (en pointillés) et cosinus (en trait plein), 2π-périodiques

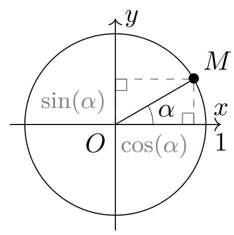

Figure 3 – Cercle trigonométrique